FSJES
Ain Chock
FACULTÉ DES SCIENCES JURIDIQUES,
ÉCONOMIQUES ET SOCIALES AIN CHOCK
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

جامعة الحسن الثاني بالدار البيضاء
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

SCIENCES ÉCONOMIQUES ET DE GESTION

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2019-2020

SEMESTRE 2

MATHEMATIQUES FINANCIERES

Pr. ADAM CHATI

PLAN DU COURS

CHAPITRE 1 :

Les intérêts simples

1

CHAP 1 : Les intérêts simples

« Le temps, c'est de l'argent» selon la formule populaire! « Préférez vous recevoir 1 000 DH tout de suite (H 1 ou dans un an (H 2)?» Tout individu normalement aura une préférence en toute logique pour la première hypothèse tout simplement parce qu'il n'attribue pas de manière spontanée la même « valeur » aux 1 000 DH perçus maintenant à ceux, plus hypothétiques, reçus dans 12 mois à moins de recevoir des intérêts en compensation

Ainsi, on peut dire que celui qui prête exige un dédommagement pour l'utilité qu'on lui fait perdre, celui qui emprunte doit payer l'obtention d'une liquidité à laquelle il n'a pas droit Ce dédommagement reçu par l'un, payé par l'autre, représentera donc le prix du renoncement ou de l'obtention de la liquidité ce prix est connu sous le nom d'intérêt Ces intérêts correspondent donc au prix du temps

Ce prix du temps implique qu'une somme d'argent aujourd'hui n'aura pas la même valeur demain, d'où la distinction entre valeur «actuelle» et valeur «future»

2

CHAP 1:Les intérêts simples

1. **Définitions et concepts**

1. **La notion d'intérêt**

L'intérêt est la rémunération d'un prêt d'argent effectué par un agent économique (le prêteur) à un autre agent économique (l'emprunteur).

Lorsqu'une personne (physique ou morale) emprunte de l'argent à une autre, elle achète cet emprunt. L'intérêt est le coût de cet emprunt.

La somme empruntée s'appelle le capital. La somme qui doit être remboursée est donc la somme du capital et de l'intérêt.

3

CHAP 1:Les intérêts simples

1. **Définitions et concepts**

1. **La notion d'intérêt**

Exemples

- J'emprunte de l'argent à la banque. Je suis l'emprunteur, le banquier est le prêteur. Mon emprunt me coûte.

- *Je* place de l'argent sur un compte bancaire. Je suis le prêteur, la banque est l'emprunteur. mon placement me rapporte (et coûte à la banque).

4

CHAP 1: Les intérêts simples

1. Définitions et concepts

1.2 Le taux d'intérêt

Le taux d'intérêt par période est l'intérêt rapporté par une unité monétaire pendant une période.

Si i est le taux d'intérêt par période, l'intérêt I produit par un capital C pendant la période est obtenu en multipliant i par C : $I = C \times i$

L'emprunteur aura donc à rembourser $C + I = C + (C \times i) = C \times (1 + i)$

5

CHAP 1: Les intérêts simples

1. Définitions et concepts

1.2 Le taux d'intérêt

Le taux d'intérêt dépend de nombreux paramètres économiques, financiers politiques et de circonstances propres à l'opération considérée.

La notion économique du taux d'intérêt revêt, dans la pratique, différentes formes :

- **Coût du crédit à la consommation,**
- **Intérêts versés sur un compte d'épargne,**
- **Agios de découvert en banque,**
- **Escompte d'effets de commerce,**
- **Rendement d'une obligation,**
- **Coût d'opportunité d'un investissement.**

6

CHAP 1:Les intérêts simples

1. Définitions et concepts

1.2 Le taux d'intérêt

Exemple

Pour payer la caution de mon appartement, mon banquier me prête 9 000 DH pour un an au taux annuel de 4,6% (4,6% = 4,6/100 = 0,046).

On a *C* = 9 000 et *i* = 4,6%.

L'intérêt en DH produit par 9 000 DH à 4,6% annuel pendant un an est :

I = C x i =**9 000 x 4,6% = 414 DH.**

La somme à rembourser après un an est : 9 000 x (1 + 0,046) = 9 414 DH

Mon emprunt aura donc coûté 414 DH.

7

CHAP 1:Les intérêts simples

1. Définitions et concepts

1.3 L'intérêt simple

- Un capital est placé à intérêts simples lorsque les intérêts ne s'ajoutent pas au capital pour porter eux-mêmes intérêt ; c'est le capital de départ qui produit l'intérêt pendant toute la durée de placement.
- L'intérêt simple est utilisé pour des emprunts ou des placements à court terme, c'est à dire sur une durée < 1 an.
- L'intérêt simple est calculé *pro rata temporis* et est versé en une seule fois, au début ou à la fin de l'opération.

8

CHAP 1:Les intérêts simples

2. Calcul

L'intérêt simple est proportionnel au capital prêté ou emprunté (***C***), au taux d'intérêt **(*i*)** et à la durée de placement ou d'emprunt **(*n*).**

Posons *C* un capital emprunté pendant *n* périodes au taux *i* par période.

L'intérêt à payer après la 1ère période est : *C* x *i* , et puisque c'est le capital de départ *C* qui produit l'intérêt, l'intérêt à payer après chaque période est *C* x *i.*

9

Différence entre intérêt simple et intérêt composé

Exemple : Calcul des intérêts produits par un capital de 1 000 DH placé pendant 3 ans au taux de 5%

Année	Capital placé à intérêts simples			Capital placé à intérêts composés		
	Capital placé début de période	Intérêts produits	Capital à la fin de période	Capital placé début de période	Intérêts produits	Capital à la fin de période
1	1000	50	1050	1000	50	1050
2	1000	50	1050	1050	52,50	1102,50
3	1000	50	1050	1102,50	55,125	1157,625
		150			**157,625**	

10

CHAP 1:Les intérêts simples

2. Calcul

L'intérêt total à payer (le coût de l'emprunt) est donc :

$$I_n = \underbrace{C \times i + ... + C \times i}_{\text{n fois}}$$

c'est à dire,

$$\boxed{I_n = C \times i \times n}$$

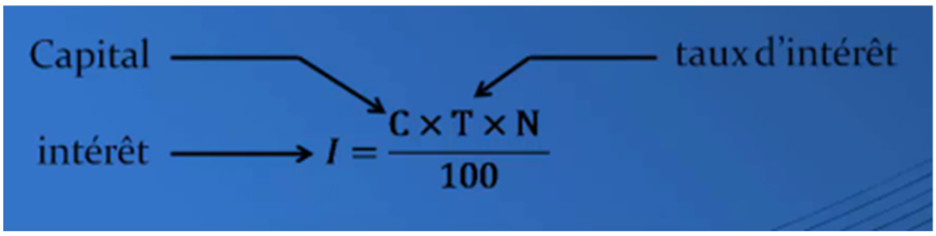
Exemple

Un capital de 10 000 DH placé pendant 6 mois au taux mensuel de 0,25% rapporte un intérêt égal :

I = 10 000 x 0,25% x 6 = 150 DH.

CHAP 1:Les intérêts simples

Calcul de l'intérêt



CHAP 1:Les intérêts simples

3. Les taux proportionnels

Les taux sont exprimés, par convention, en terme annuel. Dès lors, il peut se poser un problème si la durée (*n*) n'est pas exprimée annuellement.

Le taux prévalent pour une période de capitalisation ou d'actualisation < à l'année doit être calculé de manière proportionnelle $\Rightarrow$ Taux proportionnel

Deux taux sont dits proportionnels si leurs valeurs sont proportionnelles à leurs durées respectives.

13

CHAP 1:Les intérêts simples

3. Les taux proportionnels

Soient i le taux annuel et i_k le taux périodique si l'on considère qu'il y a k périodes dans l'année. La relation entre les deux taux s'exprime tel que :

$$\boxed{i_k = \frac{i}{k}}$$

Exemple

Soit la somme de 10 000 DH placée au taux annuel de 6% pendant une année.

14

CHAP 1 : Les intérêts simples

3. Les taux proportionnels

- Intérêts calculés avec le taux annuel :

i = 6%   et $I = 10000 \times 6\% \times 1 = 600\,DH$

- Intérêts calculés avec le taux trimestriel :

$i_t = \frac{6\%}{4} = 1{,}5\% \quad et \quad I = 10000 \times 1{,}5\% \times 4 = 600\,DH$

- Intérêts calculés avec le taux mensuel :

$i_m = \frac{6\%}{12} = 0{,}5\% \quad et \quad I = 10000 \times 0{,}5\% \times 12 = 600\,DH$

- Intérêts calculés avec le taux journalier :

$i_j = \frac{6\%}{360} = 0{,}0167\% \quad et \quad I = 10000 \times 0{,}0167\% \times 360 = 600\,DH$

15

CHAP 1 : Les intérêts simples

4. La valeur acquise (ou future)

La valeur acquise (C_n) est égale à la somme du capital initial (C_0) et des intérêts qu'il génère, au terme d'une certaine durée de placement.

$$C_n = C_0 + nC_0 i \quad \Longrightarrow \quad C_n = C_0(1 + ni)$$

16

CHAP 1:Les intérêts simples

4. La valeur acquise (ou future)

La valeur acquise (C_n) est égale à la somme du capital initial (C_0) et des intérêts qu'il génère, au terme d'une certaine durée de placement.

La valeur acquise est la somme du capital initial et des intérêts qu'il a généré au terme de sa durée de placement.

$$\begin{aligned} C_n &= C_0 + I \\ &= C_0 + \left[\frac{C \times t \times n}{36000}\right] \\ &= C_0\left(1 + \frac{t \times n}{36000}\right) \end{aligned}$$

17

Principe et champs d'application

La formule relative au calcul de l'intérêt simple pour une durée n comptée en années est peu utilisée du fait que, par hypothèse, l'intérêt simple ne se calcule que pour des durées inférieures à l'année, c'est pourquoi nous donnons, dans ce qui suit, les formules de calcul de l'intérêt simple pour des durées comptées en m mois ou en n jours.

- Pour ce faire, on sait que : I = C x n x t / 100

- Si la durée n est en jours : I = C x n x t / 36 000
- Si la durée n est en mois : I = C x n x t / 1 200
- Si la durée n est en quinzaines : I = C x n x t / 2 400

18

CHAP 1:Les intérêts simples

Exemple :

Pour un capital initial de 10 000 DH placé 6 mois au taux annuel de 12%

la valeur acquise est :

$$C_6 = 10000\left(1 + 6 \times \frac{12\%}{12}\right) = 10600$$ soit, $C_6 = 10000 + 600 = 10600$

19

CHAP 1:Les intérêts simples

5. Les intérêts précomptés et post comptés

Les intérêts sont dits post comptés ou à terme échu lorsqu'ils sont versés en fin de période.

Exemple

Un entrepreneur emprunte aujourd'hui 500 000 DH à 10% pour une durée de trois mois. Combien doit-il rembourser à l'issue du contrat ?

$$C_3 = 500000\left(1 + 3 \times \frac{10\%}{12}\right) = 512500$$

20

CHAP 1 : Les intérêts simples

5. Les intérêts précomptés et post comptés

Les intérêts sont dits <u>précomptés ou à terme à échoir</u> lorsqu'ils sont versés en début de période et déduits du capital initial.

Exemple

Dans le cas d'emprunt à intérêts précomptés, l'entrepreneur ne reçoit que 487 500 DH et remboursera trois mois plus tard la somme de 500 000 DH.

21

CHAP 1 : Les intérêts simples

5. Les intérêts précomptés et post comptés

Un emprunteur préfère verser ses intérêts fin de période, tandis que le prêteur est avantagé par la perception des intérêts en début de période. Le taux d'intérêt est plus élevé dans le cas des intérêts précomptés.

<u>C'est le taux effectif de placement (*i'*).</u>

Les deux taux sont liés par la relation suivante :

$$i' = \frac{Valeur\ acquise - Valeur\ initiale}{Valeur\ initiale} \times \frac{k}{n}$$

22

CHAP 1:Les intérêts simples

Les deux taux sont liés par la relation suivante :

$$i' = \frac{Valeur\ acquise - Valeur\ initiale}{Valeur\ initiale} \times \frac{k}{n}$$

$$i' = \frac{500000 - 487500}{487500} \times \frac{12}{3} = 10,25\%$$

23

Principe et champs d'application

Un intérêt est dit simple lorsqu'il est directement proportionnel au taux, au temps et au montant monétaire.

I	Intérêt
C	Capital
t	Taux pour 100 € par an
n	La durée (en jours)

L'année bancaire est de 360 jours ($36000 = 360 \times 100$).

$$I = \frac{C_0 \times t \times n}{36000}$$

24

Applications :

Un prêt obtenu le 14 avril est remboursé le 12 août. Quelle a été la durée de l'opération ?

- Avril 16
- Mai 31
- Juin 30
- Juillet 31
- Août 12

Somme 120 jours

25

Solution

Calculer l'intérêt généré par un placement de 30 000 dhs, à 5 %, du 25 juin au 22 novembre.

$$n = (30 - 25) + 31 + 31 + 30 + 31 + 22$$
$$= 150$$

$$I = \frac{C_0 \times t \times n}{36000}$$

26

Solution :

Calculer le capital qui, à 3 %, a acquis une valeur de 25 048 dhs au bout de 120 jours de placement.

$$C_0 + \left[\frac{C_0 \times 3 \times 120}{36000}\right] = 25048$$

Capital = 24 800 DHS

27

Solution :

Déterminer le taux de placement d'un capital de 6000 dhs qui a produit, du 13 septembre au 30 décembre, un intérêt de 81 dhs.

$$n = (30 - 13) + 31 + 30 + 30$$
$$= 108$$

$$I = \frac{C_0 \times t \times n}{36000}$$

$$\frac{6000 \times t \times 108}{36000} = 81$$
$$t = 4,5\%$$

28

Solution :

Intérêts fournis par le placement :

$$I = \frac{C_0 \times t \times n}{1200} \qquad \frac{10000 \times 6 \times 8}{1200} = 400$$

Capital effectivement placé : $10000 - 400 = 9600$

$$I = \frac{C_0 \times t \times n}{1200} \qquad \frac{9600 \times t \times 8}{1200} = 400$$

$$t = 6{,}25\%$$

29

Notion d'effet de commerce

Le 10 avril, A vend à B des marchandises pour un montant de 30 000 DH le règlement devant intervenir le 30 juin A le créancier doit donc attendre le 30 juin pour entrer en possession de ses fonds Cependant il peut avoir besoin de cet argent bien avant le 30 juin

Supposons que A sollicite, le 26 avril, une avance de son banquier, avance garantie par la créance qu'il possède sur B Le banquier n'accordera cette avance que si A, son client, est en mesure de prouver par un document écrit l'existence de cette créance de 30 000 DH à échéance du 30 juin

A se tournera vers B et lui demandera alors

- ❑ Soit de souscrire un billet à ordre, c'est à dire de promettre, par écrit, de lui régler une somme de 30 000 DH à la date du 30 juin,
- ❑ Soit d'apposer sa signature sur une lettre de change, ou traite, rédigée par A, reconnaissant aussi l'existence, au profit de A, d'une créance de 30 000 DH, à encaisser le 30 juin

30

Escompte commercial

L'escompte est l'opération par laquelle un banquier verse par avance au porteur d'un effet de commerce (lettre de change, billet d'ordre, une traite) non échu le montant de celui ci, sous déduction d'intérêt

L'escompte commercial est l'intérêt retenu par la banque sur la valeur nominale (somme inscrite sur l'effet) de l'effet pendant le temps qui s'écoule depuis le jour de la remise à l'escompte jusqu'au jour de l'échéance

De cette définition simple, découle la règle pour calculer l'escompte produit par un effet de commerce. En effet il suffit d'appliquer la Formule fondamentale des intérêts simples :

31

Escompte commercial

$$E = \frac{VN . n . t}{36000}$$

E : Escompte commercial produit par l'effet de commerce

VN : valeur nominale de l'effet de commerce ;

n : Durée d'escompte en jours

t : taux d'escompte

32

Escompte commercial

Applications :

- ❖ Calculer l'escompte d'un effet de valeur nominale 15 000 DH ayant un taux d'escompte de 9% et une échéance à 46 jours
- ❖ Calculer le taux d'escompte d'un effet de valeur nominale 5 200 DH et ayant produit un escompte égal à 200,20 DH pour une échéance de 4 mois
- ❖ Quelle est la valeur nominale d'un effet qui, escompté à un taux de 9,50 % pour une échéance de 56 jours, produit un escompte égal à 345,50 DH
- ❖ Un effet de valeur nominale 7 694,17 DH est escompté à un taux de 9,25% Quelle est sa date d'échéance si la banque prélève 19,77 DH d'escompte

33

Valeur actuelle commerciale

La valeur actuelle est la valeur à laquelle se négocie, aujourd'hui l'effet, c'est à dire la valeur par laquelle l'effet est remplacé.

La valeur actuelle, notée Va, d'un effet négocié est égale à sa valeur nominale diminuée du montant de l'escompte.

Valeur actuelle commerciale = Valeur nominale – Escompte

$$Va = VN - E$$

$$Va = VN\,(1 - n.t/36000)$$

34

Valeur actuelle commerciale

Exemple :

Calculer la valeur actuelle d'un effet de valeur nominale 18 500 DH, négocié à un taux d'escompte de 9,50 % pour une échéance de 65 jours.

35

Valeur nette commercial

L'opération commerciale d'escompte comprend d'autres frais financiers en plus de l'escompte Ces frais sont composés essentiellement de commissions qui peuvent être de différents types (commission de courrier, jours de banque, etc.), et de la Taxe sur la Valeur Ajoutée (TVA)

La somme de l'escompte et des commissions donne ce qu'on appelle les Agios, hors taxe auquel on applique un taux de TVA pour avoir les Agios TTC

Les AGIOS TTC peuvent être calculés directement à partir des AGIOS HT, sachant que :

AGIOS TTC = (AGIOS HT) x (1 + Taux de TVA)

AGIOS HT = Escompte + Commissions

AGIOS TTC = (Escompte + Commissions)(1 + taux TVA)

Valeur Nette = Valeur Nominale - AGIOS TTC

36

Valeur nette commercial

Calculer la valeur nette commerciale de l’effet de commerce de valeur nominale de 50 000 00 DH, d’échéance le 30 novembre et de date de remise à l’escompte le 15 septembre de la même année aux conditions suivantes :

- Taux d’escompte 10%
- Commission de courrier 1000 DH
- Taux de TVA 10 %
- Tenir en compte un jour de banque

37

Valeur nette commercial

Quelle est la valeur nette commerciale de 3 effets qu’une entreprise remet à l'escompte le 10 mars, avec les informations suivantes :

25 000 00 DH à échéance le 15 mai de la même année
26 000 00 DH à échéance le 20 juin de la même année
20 000 00 DH à échéance le 12 juillet de la même année

- ✓ Taux d’escompte 10
- ✓ Commission de courrier 10 DH
- ✓ Tenir compte d’un jour de banque
- ✓ Taux de TVA 10%

38

Taux d'escompte réel

En considérant l'ensemble de ce qui est retenu par la banque (AGIOS TTC) comme intérêt de la valeur nominale VN de l'effet de commerce, pendant la durée réelle d'escompte n, on obtient le taux réel d'escompte tr donné par la formule :

$$T_r = \frac{36\,000 \,.\, (\text{AGIOS TTC})}{\text{VN} \,.\, n}$$

Ce taux est supérieur au taux d'escompte annoncé t

39

Taux d'escompte réel

Exemple :

Considérons un effet de commerce d'une Valeur Nominale de 40 000,00 DH, d'échéance le 30 novembre et remis à l'escompte le 5 octobre de la même année aux conditions suivante :

- **Taux d'escompte 10 %**
- **Commission de courrier 10 DH**
- **Tenir compte d'un jour de banque**
- **Taux de TVA 10%**

Calculez le taux réel d'escompte

40

CHAPITRE 2 :

Les intérêts composés

CHAP 2 : Les intérêts composés

Un capital est dit placé à intérêt composé, lorsqu'à l'issue de chaque période de placement, les intérêts simples produits sont ajoutés au capital pour porter eux même intérêts à la période suivante au taux convenu. On parle alors d'une capitalisation des intérêts. Cette dernière opération est généralement appliquée lorsque la durée de placement dépasse un an. La distinction fondamentale entre intérêts composés et intérêts simples réside dans la capitalisation

CHAP 2 : Les intérêts composés

1. Définition

Un capital est placé à intérêts composés lorsque, à l'issue de chaque période de placement, **les intérêts s'ajoutent au capital** et portent eux- mêmes intérêt au taux de contrat initial.

Ce principe est appelé **capitalisation**.

Conventionnellement, on est en intérêts composés dès que le placement excède une année.

CHAP 2 : Les intérêts composés

Exemples

1) Votre banquier vous prête **9 000 DH** pour deux ans au taux annuel de **4,6%.**

L'intérêt dû après un an est de **414 DH**. Vous ne payez pas ces 414 DH et tout se passe comme si, à la fin de la 1ère année, il vous restait à rembourser **9 414 DH.**

L'intérêt produit par ces 9 414 DH pendant la seconde année est : 9 414 x 0,046 = **433 DH**, et à la fin de la seconde année vous remboursez : 9 414 + 433 = **9 847 DH**.

Votre emprunt = 9 000 DH, votre remboursement = 9 847 DH

cet emprunt vous a coûté 847 DH

CHAP 2 : Les intérêts composés

Un capital de **10 000 DH** placé au taux annuel de **10%** donnera au cours de la 1ère année **1 000 DH** d'intérêts simples. Incorporés à la fin de cette 1ère année au capital initial, ceux-ci porteront le capital placé à **11 000 DH.**

C'est sur ce nouveau capital que sera calculé l'intérêt de la 2ème année de placement : **11 000 x 10% = 1 100 DH.** L'incorporation de cet intérêt au capital portera le capital à : **12 100 DH.**

Ce nouveau capital fournira durant la 3ème année de placement **un intérêt de 1 210 DH.**

Si durée de placement = 3 ans, la valeur acquise finale du capital placé :
12 100 + 1 210 = 13 310 DH, somme reçue par le prêteur (l'investisseur) au bout de 3 ans de la part de l'emprunteur.

CHAP 2 : Les intérêts composés

2. La valeur acquise (ou future) d'un capital

La valeur acquise (ou future) d'un capital correspond à **la valeur que prendra un capital qui reste placé pendant *n* périodes à un taux constant *i*.**
On place un capital C_0 pendant *n* années au taux *i* par année.
-Fin de la 1ère année : l'intérêt produit est $C_0 \times i$, le capital est $C_1 = C_0 (1+ i)$
-Fin de la 2ème année : l'intérêt produit est $C_1 \times i = C_0 (1+ i) \times i$, le capital est $C_2 = C_1 (1+ i) = C_0 (1+ i)^2$.

D'une année à l'autre, le capital est multiplié par (1+ *i*). La suite C_n est donc une suite géométrique de 1er terme C_0 et de raison 1+ *i* de sorte que le capital à la fin des *n* années est : $C_n = C_0 (1+ i)^n$

CHAP 2 : Les intérêts composés

2. La valeur acquise (ou future) d'un capital

Date (années)	Capital au début de l'année	Intérêt de l'année	Valeur acquise à la fin de l'année après capitalisation de l'intérêt de l'année
1	C	Ci	$C + Ci = C(1+i)$
2	$C(1+i)$	$C(1+i)i$	$C(1+i) + C(1+i)i = C(1+i)^2$
3	$C(1+i)^2$	$C(1+i)^2i$	$C(1+i)^2 + C(1+i)^2i = C(1+i)^3$
.			
.			
.			
n-1	$C(1+i)^{n-2}$	$C(1+i)^{n-2}i$	$C(1+i)^{n-2} + C(1+i)^{n-2}i = C(1+i)^{n-1}$
n	$C(1+i)^{n-1}$	$C(1+i)^{n-1}i$	$C(1+i)^{n-1} + C(1+i)^{n-1}i = C(1+i)^n$

Le capital investi suit une progression géométrique croissante

CHAP 2 : Les intérêts composés

Exemple : Calcul des intérêts produits par un capital de 1 000 DH placé pendant 3 ans au taux de 5%

Année	Capital placé à intérêts simples			Capital placé à intérêts composés		
	Capital placé début de période	Intérêts produits	Capital à la fin de période	Capital placé début de période	Intérêts produits	Capital à la fin de période
1	1000	50	1050	1000	50	1050
2	1000	50	1050	1050	52,50	1102,50
3	1000	50	1050	1102,50	55,125	1157,625
		150			**157,625**	

CHAP 2 : Les intérêts composés

La valeur acquise, notée C_n, d'un capital initial C_0, placé, pendant n périodes, au taux d'intérêt périodique t est donné par la formule générale

$$\mathbf{VA = C_n = C_0(1 + t)^n}$$

Ainsi, la somme totale des intérêts produits par un capital placé, pendant n périodes, au taux d'intérêt périodique t est :

$$\mathbf{I = C_n - C_0 = C_0 (1+t)^n - C_0}$$

CHAP 2 : Les intérêts composés

$$\boldsymbol{C_{nk} = C_0 (1+ i_k)^{nk}}$$

Ce capital est appelé la valeur acquise ou future.

Si vous avez placé de l'argent, C_{nk} est la somme que vous recevez à la fin du placement. Si vous avez emprunté de l'argent, C_{nk} est la somme que vous devez rembourser.

CHAP 2 : Les intérêts composés

$$C_{nk} = C_0\,(1+ i_k)^{nk}$$

Ce capital est appelé la valeur acquise ou future.

Exemple

Soit un placement de 10 000 DH rapportant 4% par an.

La somme obtenue au terme de 5 années est :

$$C_n = C_0\,(1+ i)^n$$

$$C_n = 10\,000\,(1{,}04)^5 = 12\,166{,}53 \text{ DH}$$

CHAP 2 : Les intérêts composés

Applications

Soit un capital de 10 000 DH placé au taux trimestriel d'intérêt i_k = 2,5%. Calculer sa valeur future au bout de 6 ans.

A quel taux d'intérêt annuel (i) faut-il placer un capital (C) pour que sa valeur augmente de 79,6% en 12 ans ?

Un capital de 40 000 DH placé au taux semestriel i_k = 4,75% a permis de constituer la somme de 76 597,84 DH. Quelle a été la durée de ce placement ?

CHAP 2 : Les intérêts composés

Soit un capital de 10 000 DH placé à intérêt composé au taux trimestriel d'intérêt, $i_k = 2,5\%$. Calculer sa valeur future au bout de 6 ans.

Pour exprimer la durée et le taux de placement par référence au trimestre qui est la période de capitalisation, la durée de placement sera exprimée en trimestres, soit 24.

$$C_{nk} = C_0\,(1+ i_k)^{nk} = 10\,000\,(1,025)^{24} = 18\,087,26 \text{ DH}$$

CHAP 2 : Les intérêts composés

A quel taux d'intérêt annuel (i) faut-il placer un capital (C) pour que sa valeur augmente de 79,6% en 12 ans ?

On cherche i solution de : $(1+ i)^{12} = 1,796$

$$i = (1,796)^{1/12} - 1 = 5\%$$

CHAP 2 : Les intérêts composés

Un capital de 40 000 DH placé au taux semestriel i_k = 4,75% a permis de constituer la somme de 76 597,84 DH. Quelle a été la durée de ce placement ?

On cherche nk solution de : $76\,597{,}84 = 40\,000\,(1{,}0475)^{nk}$

$$\ln(76\,597{,}84 / 40\,000) = nk \ln(1{,}0475)$$

nk = 14 semestres.

CHAP 2 : Les intérêts composés

3. La valeur actuelle (ou présente) d'un capital

On peut raisonner inversement et se poser la question de savoir quel est le capital qu'il est nécessaire d'investir aujourd'hui pour percevoir un montant à une date donnée. Il s'agit d'actualiser une valeur future.

La formule précédente est inversée : $C_0 = \dfrac{C_{nk}}{(1+i_k)^{nk}}$

Valeur actuelle d'un capital

L'actualisation est l'opération inverse de la capitalisation, en effet:

- **Capitaliser** c'est déterminer, à un taux d' intérêt composé donné, la valeur future d'une somme, à une date postérieure
- **Actualiser**, c'est déterminer la valeur actuelle, la valeur d' aujourd'hui, à un taux d'intérêt donné, d'une somme payable à une période future.

Soit C un capital payable à une période future n et C_0 la valeur du capital C à la période actuelle 0, on a :

$$\mathbf{C = C_0\,(1 + t)^n}$$
$$\mathbf{C_0 = C\,(1 + t)^{-n}}$$

Ainsi C_0 est dite : la valeur actuelle, à la date 0, du capital C

CHAP 2 : Les intérêts composés

Exemple :

1) On souhaite disposer d'un capital de 250 000 DH dans 15 ans et on a la possibilité de réaliser un placement rémunéré à un taux fixe de 5%.

La somme qu'il convient de placer s'élève à :

$$250\,000\ (1+ 5\%)^{-15} = 120\,254{,}27.$$

CHAP 2 : Les intérêts composés

2) Est-il préférable de payer

1 000 DH dans un an

ou

950 DH aujourd'hui

sur la base d'un taux d'intérêt annuel de i = 6% ?

CHAP 2 : Les intérêts composés

2) Est-il préférable de payer 1 000 DH dans un an ou 950 DH aujourd'hui sur la base d'un taux d'intérêt annuel de i = 6%.

Si $1\,000\,(1+i)^{-1} > 950$ alors l'option 2 est préférable

Si $1\,000\,(1+i)^{-1} < 960$ alors l'option 1 est préférable

$$1\,000\,(1+i)^{-1} = 1\,000\,(1{,}06)^{-1} = 943{,}40 \text{ DH}$$

L'option 1 est donc meilleure.

CHAP 2 : Les intérêts composés

4. Les taux équivalents

Deux taux correspondant à des périodes de capitalisation différentes sont dits équivalents quand ils donnent une valeur acquise identique au terme d'une même durée de placement.

CHAP 2 : Les intérêts composés

4. Les taux équivalents

Exemple :

La valeur acquise d'un (1) DH au bout d'un (1) an est la même, que la capitalisation se fasse une fois ou plusieurs fois dans l'année :

$$\Rightarrow \qquad (1+i) = (1+i_k)^k$$

CHAP 2 : Les intérêts composés

- Le taux annuel équivalent : $i = \left(1 + i_k\right)^k - 1$

- Le taux périodique équivalent : $i_k = \left(1 + i\right)^{1/k} - 1$

Exemples

1) Soit un placement de 1 000 DH sur une année au taux annuel de 10%.

Périodicité	**Taux**
Annuelle	10%
Semestrielle	5%
Trimestrielle	2,5%
Mensuelle	0,83%

CHAP 2 : Les intérêts composés

- Le taux annuel équivalent : $i = \left(1 + i_k\right)^k - 1$

- Le taux périodique équivalent : $i_k = \left(1 + i\right)^{1/k} - 1$

Exemple

Soit un placement de 1 000 DH sur une année au taux annuel de 10%.

Périodicité	**Taux**	**Valeur acquise**	**Taux équivalent**
Annuelle	10%	1 000 x (1+ 10 %) = 1 100	10%
Semestrielle	5%	1 000 x $(1+ 5\ \%)^2$ = 1 100,25	10,25%
Trimestrielle	2,5%	1 000 x $(1+ 2{,}5\%)^4$ = 1 100,38	10,38%
Mensuelle	0,83%	1 000 x $(1+0{,}83\%)^{12}$ =1 100,47	10,47%

CHAP 2 : Les intérêts composés

Applications :

1) Calculer le taux semestriel équivalent au taux annuel i = 9,5%.

2) Calculer le taux annuel correspondant à un taux trimestriel $i_k = 2\%$.

CHAP 2 : Les intérêts composés

1) Calculer le taux semestriel équivalent au taux annuel i = 9,5%.

On écrira :

$$(1+i_k)^2 = (1+i)$$

$$(1+i_k)^2 = 1{,}095$$

$$i_k = 1{,}095^{1/2} - 1$$

$$i_k = 4{,}64\%$$

CHAP 2 : Les intérêts composés

2) Calculer le taux annuel correspondant à un taux trimestriel $i_k = 2\%$.

$$\mathbf{i = (1 + i_k)^4 - 1}$$

$$\mathbf{i = (1{,}02)^4 - 1 = 8{,}24\%}$$

Applications

Quelle somme faut il placer maintenant à intérêt composé au taux annuel de 9% pour avoir dans 5 ans une valeur acquise de 50 000 DH ?

Quelle est la valeur acquise par un capital, après 3 années de placement, au taux d'intérêts de 7% si sa valeur actuelle est de 5 000 DH

Au bout de combien de temps un capital de valeur actuelle d'un montant de 13 500 DH acquiert il une valeur de 19 795,38 DH s'il est placé à un taux d'intérêt de 6% l'an

A quel taux d'intérêt composé a été placé un capital qui a atteint un montant de 35 000 DH au bout de 3 années alors que sa valeur actuelle n'est que de 30 000 DH?

Chapitre 3 :

Les annuités

CHAP 3 : Les annuités

Définition

1. Les annuités sont des versements périodiques de sommes d'argent pour :

- **Constituer une épargne** ou un capital (Exemple: Capital retraite) ;
- **Rembourser** un prêt ou amortir un investissement.

2. L'objectif de l'étude des annuités est de **déterminer:**

- **La valeur acquise**, à une date donnée, de l'ensemble des annuités;
- **La valeur actuelle**, à la date d'aujourd'hui, de l'ensemble d'une série d'annuités ;

3. Les annuités peuvent être **constantes ou variables:**

- **Les annuités *constantes*** sont des annuités dont la somme versée est constante.
- **Les annuités *variables*** sont des annuités dont le montant varie d'une période à l'autre.

CHAP 3 : Les annuités

Définition

4. Période:

La période retenue est l'année, mais on peut effectuer des versements semestriels, trimestriels ou mensuels ; on parle alors dans ce cas de semestrialités, trimestrialités ou mensualités.

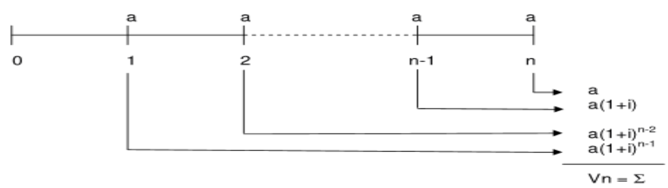
CHAP 3 : Les annuités

Annuités constantes de fin de période

CHAP 3 : Les annuités

1. Valeur acquise à la date du dernier versement :

On appelle valeur acquise par une suite d'annuités constantes de fin de périodes, la somme des annuités exprimées immédiatement après le dernier versement.



- Soit :

a: le montant constant de l'annuité ;

n : le nombre d'annuités (de périodes) ;

t : le taux d'intérêt ;

Vn : la valeur acquise par la suite d'annuités au terme de la dernière ;

CHAP 3 : Les annuités

1. Valeur acquise à la date du dernier versement :

$$Vn = a + a(1+t) + a(1+t)^2 + \ldots\ldots + a(1+t)^{n-2} + a(1+t)^{n-1}$$

$$Vn = a\,[\,1 + (1+t) + (1+t)^2 + \ldots\ldots + (1+t)^{n-2} + (1+t)^{n-1}]$$

Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique q = (1+i) et comprenant n termes. La formule devient donc:

$$\boxed{V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}} \quad = \quad V_n = a\,\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

Le montant d'annuité peut être exprimée en fonction de la valeur acquise

$$a = Vn\,\frac{t}{(1+t)^n - 1}$$

CHAP 3 : Les annuités

1. Valeur acquise à la date du dernier versement :

Exemple

Calculer la valeur acquise, au moment du dernier versement, par une suite de 15 annuités de 35.000 DH chacune. Taux : 10% l'an.

$$V_{15} = 35.000 \times \frac{1{,}1^{15} - 1}{0{,}1} = 1.112.036{,}83 \text{ dh}$$

CHAP 3 : Les annuités

Exemple

Calculer la valeur acquise au moment du dernier versement par une suite de 10 annuités constantes de fin de période de 17.500 DH chacune. Taux : 8% l'an.

$$V_{10} = 17.500 \times \frac{1{,}08^{10} - 1}{0{,}08} = 253.514{,}84 \text{ dh}$$

CHAP 3 : Les annuités

Exemple :

Combien faut-il verser à la fin de chaque semestre pendant 8 ans, pour constituer, au moment du dernier versement, un capital de 450.000 DH. Taux semestriel : 4,5%

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$a = \frac{V_n \times i}{(1+i)^n - 1}$$

$$a = \frac{450.000 \times 0{,}045}{(1+0{,}045)^{16} - 1} = 19.806{,}9 \text{ dh}$$

CHAP 3 : Les annuités

Exercice

Pour améliorer sa pension de retraite, en versant chaque année 5 000 Dh pendant 15 ans, Monsieur Ahmed veut constituer un capital avec un taux de 6,5%.

- 1. De quelle somme disposera t-il au moment du dernier versement ?
- 2 . De quelle somme disposera t-il après 2 ans du dernier versement

Solution

- 1. On applique la relation :

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_{15} = 5000 \times \frac{(1+0{,}065)^{15} - 1}{0{,}065} = 120\,910{,}84$$

- 2. On applique la relation :

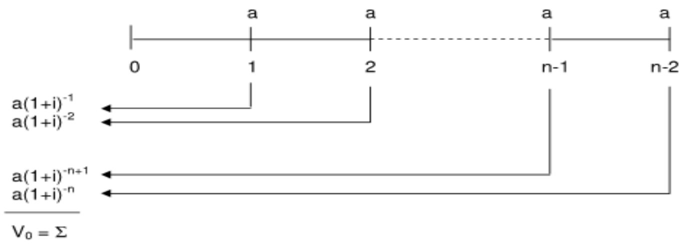
$$V_{n+p} = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i)^p$$

$$V_{15+2} = V_{17} = 5000 \times \frac{(1+0{,}065)^{15} - 1}{0{,}065} \times (1+0{,}065)^2 = 137140{,}105$$

CHAP 3 : Les annuités

2. Valeur actuelle

- La date d'évaluation est l'origine (date zéro) : On actualise ensemble des versements
- On appelle valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de fin de période, la somme des annuités actualisées à l'origine.



Si on note par :
V_0 = la valeur actuelle par la suite des annuités
a = l'annuité constante de fin de période
n = le nombre de périodes (d'annuités)
i = le taux d'intérêt par période de capitalisation

CHAP 3 : Les annuités

2. Valeur actuelle

Va = $a\,(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \ldots + a(1+i)^{-n+1} + a(1+i)^{-n}$

Va = $a\,[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-n+1} + (1+i)^{-n}]$

Va = $a\,(1+i)^{-1}\,[\,1 + (1+i)^{-1} + \ldots + (1+i)^{-n+2} + (1+i)^{-n+1}]$

On a donc une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique q = $(1+i)^{-1}$ et comprenant n termes. La formule devient :

$$Va = a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

Le montant d'annuité peut être exprimée en fonction de la valeur actuelle

$$a = Va\,\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

CHAP 3 : Les annuités

Exemple

Calculer la valeur à l'origine d'une suite de 12 annuités de 32.500 DH. Taux d'intérêt : 8,5% l'an.

$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_0 = 32.500 \times \frac{1-(1+0{,}085)^{-12}}{0{,}085} = 238.702{,}30\ DH$$

CHAP 3 : Les annuités

Exemple :

Combien faut-il payer à la fin de chaque année de l'emprunt pour rembourser une dette de 350.000 DH, par le versement de 14 annuités constantes ?

Taux d'intérêt : 10,5% l'an.

$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a = V_0 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 350.000 \times \frac{0{,}105}{1-(1+0{,}105)^{-14}}$$
$$= 48.813{,}31\ DH$$

CHAP 3 : Les annuités

Exemple

Une dette de 300 000 DH est remboursable en 20 trimestrialités constantes, le premier versement dans 3 mois. Taux 9% l'an.

Calculer la trimestrialité de remboursement.

Taux proportionnel : $i_t = \frac{i}{4} = 0,0225$

$$a = V_0 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 300\,000 \times \frac{0,0225}{1-(1+0,0225)^{-20}} = 18\,792,62\ DH$$

Taux équivalent : $1 + i_{trimestriel} = (1 + i_{annuel})^{\frac{1}{4}}$, **donc t= 0,02177**

$$a = V_0 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 300\,000 \times \frac{0,02177}{1-(1+0,02177)^{-20}} = 18663,53\ DH$$

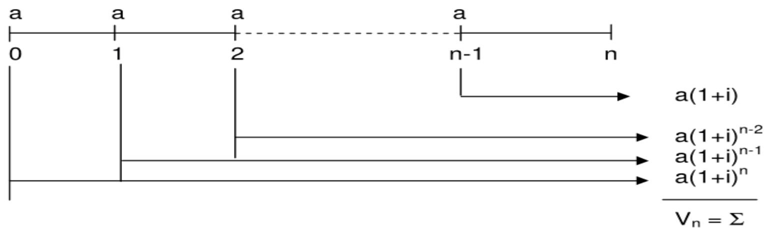
CHAP 3 : Les annuités

Annuités constantes de début de période

CHAP 3 : Les annuités

1. Valeur acquise

Si on considère que les flux sont versés en début de période, on obtient le graphique suivant:



$Vn = a + a(1+t) + a(1+t)^2 \quad + \ldots + a(1+t)^{n-1} \quad + a(1+t)^n$

$Vn = a(1+t) [1 + (1+t) + (1+t)^2 + \ldots + (1+t)^{n-2} \quad + (1+t)^{n-1}]$

La valeur acquise, à la fin de la Période n, d'une suite de n annuités toutes égales à a et versées, en début de périodes, est donnée par la relation $V_n = a(1+t)\frac{(1+t)^n-1}{t}$

CHAP 3 : Les annuités

Exemple

Calculer le capital constitué un an après le dernier versement, par une suite de 12 annuités de 27.500 DH chacune. Taux : 9% l'an.

$$V_{12} = 27.500 \times \frac{(1+0,09)^{12}-1}{0,09} \times (1+0,09) = 603.718,08 \text{ DH}$$

CHAP 3 : Les annuités

Exemple

Quelle doit être la valeur de 6 placements égaux effectués, au début de chaque trimestre pour avoir une valeur acquise de 18.790,98 DH, si le taux annuel est de 5%?

On commence d'abord par <u>**le calcul du taux d'intérêt de la période considérée (trimestre).**</u>

$$1 + i_{trimestriel} = (1 + i_{annuel})^{\frac{1}{4}}$$

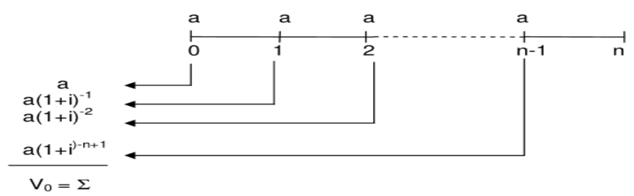
$$i_{trimestriel} = 1{,}22\%$$

$$a = \frac{V_n \times i}{(1+i) \times (1+i)^n - 1} = \frac{18790,98 \times 0,0122}{(1+0,0122) \times ((1+0,0122)^6 - 1)} = 3000\ DH$$

CHAP 3 : Les annuités

2. la valeur actuelle

- Le calcul de la valeur actuelle d'une suite d'annuités de début de période, se fait par l'actualisation de l'ensemble des versements à la date d'origine (date zéro)



Va = a + a $(1+i)^{-1}$ + $a(1+i)^{-2}$ + …..+ $a(1+i)^{-n+1}$
On a donc une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique
q = $(1+i)^{-1}$ et comprenant n termes. La formule devient :

$$Va = a(1+t)\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

CHAP 3 : Les annuités

2. la valeur actuelle

Exemple

Calculer la valeur actuelle, au moment du versement du premier terme, par une suite de 15 annuités de 31.000 DH chacune. Taux d'intérêt : 12,5% l'an.

$$V_0 = a(1+i) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_0 = 31000\,(1+0,125) \times \frac{1-(1+0,125)^{-15}}{0,125} = 231.322,18\ DH$$

CHAP 3 : Les annuités

2. la valeur actuelle

Exemple

Un emprunt est contracté au taux de 6% est remboursé à l'aide de 5 annuités annuelles constantes de 1000 dh chacune. Calculer la valeur actuelle de l'emprunt sachant que la première annuité est versée immédiatement ?

$$\boxed{V_0 = 1000 \times \frac{1-(1,06)^{-5}}{0,06} \times (1,06)^1}$$

$$\boxed{V_0 = 4465,10\ DH}$$

CHAP 3 : Les annuités

2. la valeur actuelle

Exemple

Un emprunt est contracté au taux de 6% est remboursé à l'aide de 5 annuités annuelles constantes de 1000 dh chacune. Calculer la valeur actuelle de l'emprunt sachant que la première annuité est versée dans 6 mois?

$$\mathbf{V_0 = 1000 \times \frac{1-(1,06)^{-5}}{0,06} \times (1,06)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\mathbf{V_0 = 4336,89}$$

CHAPITRE 4 :

Les emprunts indivis

CHAP 4 : Les emprunts indivis

Dans la littérature, on distingue entre deux types d'emprunts à savoir :

Remboursement

Emprunt

indivis

Se caractérise par le fait que l'emprunteur (personne physique ou morale) s'adresse à un seul prêteur (**le nominal C de la dette n'est pas divisé**).

Obligataire

Le nominal C de la dette est divisé en titres. Il s'agit d'un grand nombre de prêteurs et un seul emprunteur.

CHAP 4 : Les emprunts indivis

1. Définition

Un **emprunt indivis** est un emprunt contracté auprès d'**un seul prêteur**.

Un emprunt indivis fait l'objet de remboursement selon différentes modalités contractuellement fixées, appelées **modalités de remboursement**.

L'emprunteur verse au prêteur **des intérêts** à intervalles réguliers sur le capital détenu au cours de la période écoulée, **et rembourse le capital emprunté soit en une seule fois à l'échéance, soit en plusieurs fois**.

CHAP 4 : Les emprunts indivis

Exemple :

- Soit un emprunt $C_0 = 10\,000\ dh$ prêté à la date $t = 0$.
- Ce capital est remboursé par un remboursement de $a_1 = 4000\ dh$ la première année, $a_2 = 3000\ dh$ la 2ème année . Combien reste t-il à rembourser la 3ème année ?
- Avec i est le taux annuel de l'emprunt $i = 10\%$

$$C_0 = \frac{a_1}{1+i} + \frac{a_2}{(1+i)^2} + \frac{a_3}{(1+i)^3}$$

$$10\,000 = \frac{4000}{1+0{,}1} + \frac{3000}{(1+0{,}1)^2} + \frac{a_3}{(1+0{,}1)^3}$$

$$10\,000 - \frac{4000}{1+0{,}1} - \frac{3000}{(1+0{,}1)^2} = \frac{a_3}{(1+0{,}1)^3}$$

$$a_3 = 5170\ dh$$

CHAP 4 : Les emprunts indivis

2.Modalités de remboursement

2.1 Remboursement In fine.

On considère un capital qui est emprunté ,pour n périodes, à un taux d'intérêt i. L'emprunteur s'engage à rembourser le capital C_0 , en un seul versement égal à C_0, à la fin de la nième période.

- Le remboursement du capital C_0 s'effectue en une seule fois (en bloc): à la fin du contrat (la dernière année).
- Dans ce cas l'emprunteur ne verse à la fin de chaque année que l'intérêt I de la dette.

CHAP 4 : Les emprunts indivis

Exemple 1 :

- Un emprunt de 100 000 dh est remboursable à la fin de la 4ème année, avec un taux de 10% par an.

Périodes	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
	$C_0 = 100\,000$	$I_1 = C_0 \times i$	$---$	$a_1 = I_1$
1	100 000	$100\,000 \times 0{,}1$	0	10 000
2	100 000	10 000	0	10 000
3	100 000	10 000	0	10 000
4	100 000	10 000	100 000	$10\,000 + 100\,000$
				$= 110\,000$

Coût de l'emprunt = $i \times C_o \times n$

Coût de l'emprunt = $i \times C_o \times n = 10\,000 \times 4 = 40\,000\ dh$

CHAP 4 : Les emprunts indivis

Exemple 2 :

- Un emprunt de 250 000 dh est remboursable à la fin de la 10ème année, avec un taux de 10,5% par an.

$$\begin{cases} C_0 = 250\,000 \\ i = 0,105 \\ n = 10 \\ I = 250\,000 \times 0,105 = 26\,250 \end{cases}$$

CHAP 4 : Les emprunts indivis

Périodes	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
1	250 000	26 250	—— –	26 250
2	250 000	26 250	—— –	26 250
3	250 000	26 250	—— –	26 250
4	250 000	26 250	—— –	26 250
5	250 000	26 250	—— –	26 250
6	250 000	26 250	—— –	26 250
7	250 000	26 250	—— –	26 250
8	250 000	26 250	—— –	26 250
9	250 000	26 250	—— –	26 250
10	250 000	26 250	250 000	276 250

CHAP 4 : Les emprunts indivis

2.2 Remboursements par annuités constantes

Considérons le capital C emprunté pour n périodes à un taux d'intérêt t. L'emprunteur s'engage à rembourser le capital emprunté (capital et intérêt) sous forme de n annuités : a_1, a_2 …. , a_n . Le tableau d'amortissement d'un tel emprunt, dans ce cas est le suivant :

Périodes	Capital dû en début de période	Intérêt de la période	Amortissements	Annuité à payer
1	C	I_1	m_1	$a_1 = m_1 + I_1$
2	$C - m_1$	I_2	m_2	$a_2 = m_2 + I_2$
. .	. .	. .	. .	. .
k	$C - (m_1 + m_2 + \ldots + m_{k-1})$	I_k	m_k	$a_k = m_k + I_k$
. .	. .	. .	. .	. .
n	$C - (m_1 + m_2 + \ldots + m_{k-1} + \ldots + m_{n-1})$	I_n	m_n	$a_n = m_n + I_n$

CHAP 4 : Les emprunts indivis

2.2 Remboursements par annuités constantes

Dans le cas des annuités constantes, l'équation d'équivalence, entre valeurs acquises, devient

$$\text{Va} = C = a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \qquad a = C\,\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

La première relation donne la valeur du Capital C qu'on peut emprunter , au taux d'intérêt t , pendant n périodes, si l'on s'engage à rembourser le prêt en versant n annuités constantes égales à a.

La deuxième relation donne la valeur de l'annuité a qu'on doit payer , à la fin de chaque période, pendant les n périodes si l'on a emprunt un capital C, au taux d'intérêt t, pour n périodes

CHAP 4 : Les emprunts indivis

Tableau d'amortissement

Périodes	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 \times i$	m_1	$a = I_1 + m_1$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1 \times i$	m_2	$a = I_2 + m_2$
p	$C_{p-1} = C_{p-2} - m_{p-1}$	$I_p = C_{p-1} \times i$	m_p	$a = I_p + m_p$
$n-1$	$C_{n-1} = C_{n-2} - m$	$I_{n-1} = C_{n-2} \times i$	m_{n-1}	$a = I_{n-1} + m_{n-1}$
n	$C_n = C_{n-1} - m$	$I_n = C_{n-1} \times i$	m_n	$a = I_n + m_n$

$$\mathbf{a} = \frac{C_0 \times i}{1-(1+i)^{-n}} \quad \textit{l'annuité est constante}$$

CHAP 4 : Les emprunts indivis

Exemple :

- Un emprunt de 100 000 dh est remboursable à la fin de la 5ème année, avec un taux de 10% par an.

$$a = \frac{C_0 \times i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{100\,000 \times 0{,}10}{1-(1+0{,}1)^{-5}} = 26379{,}7481$$

$m_1 = a - I_1 =$ 26379,74808-10000

Date	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
1	100000	10000	16379,74808	26379,74808
2	83620,25192	8362,02519	18017,72289	26379,74808
3	65602,52903	6560,2529	19819,49518	26379,74808
4	45783,03386	4578,30339	21801,44469	26379,74808
5	23981,58916	2398,15892	23981,58916	26379,74808

Coût de l'emprunt = $10\,000 + \cdots + 2\,398{,}15892 = 31\,898{,}74\ dh$

CHAP 4 : Les emprunts indivis

- **2.3 Remboursements par amortissement constant**

- Dans ce cas, l'amortissement est réparti de façon égale sur l'ensemble des périodes **m = C_0/n**

- L'annuité est obtenue par la somme de l'intérêt de la période et de l'amortissement constant, puisque l'intérêt baisse d'une période à l'autre, l'annuité sera donc en diminution

CHAP 4 : Les emprunts indivis

Exemple 1 :

- Un emprunt de 200 000 DH est remboursable en 5 ans selon le système des amortissements constants, dresser le tableau d'amortissement de cet emprunt si le taux d'intérêt annuel est de 10%

Périodes	Capital dû en début de période	Intérêt de la période	Amortissements	Annuité à payer
1	200 000	20 000	40 000	60 000
2	160 000	16 000	40 000	56 000
3	120 000	12 000	40 000	52 000
4	80 000	8 000	40 000	48 000
5	40 000	4 000	40 000	44 000

CHAP 4 : Les emprunts indivis

Exemple 2 :

- Un emprunt de 100 000 dh est remboursable à la fin de la 4ème année, avec un taux de 10% par an.

$C_1 = C_0 - m$

Date	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
	C_0	$I_1 = C_0 \times i$	$m = \frac{C_o}{n}$	$a_1 = I_1 + m$
1	100 000	10 000	$m = \frac{100\ 000}{4} = 25000$	$a_{1=}$ $= 10\ 000 + 25\ 000$ $= 35\ 000$
2	$100\ 000 - 25\ 000$ $= 75\ 000$	7 500	$m = 25\ 000$	32 500
3	50 000	5 000	25 000	30 000
4	25 000	2 500	25 000	27 500

Coût de l'emprunt = $10\ 000 + 7\ 500 + 5\ 000 + 2\ 500 = 25\ 000\ dh$

CHAP 4 : Les emprunts indivis

Exemple 3 :

- Un emprunt de 100 000 dh est remboursable à la fin de la 5ème année, avec un taux de 5% par an.

Date	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
1	100000	5000	20000	25000
2	80000	4000	20000	24000
3	60000	3000	20000	23000
4	40000	2000	20000	22000
5	20000	1000	20000	21000

Coût de l'emprunt = $5\ 000 + 4\ 000 + 3\ 000 + 2\ 000 + 1\ 000 = 15\ 000\ dh$

CHAP 4 : Les emprunts indivis

Application :

- Un entrepreneur désire réaliser un investissement de 800 000 dh. Pour financer le projet, il fait appel à un seul emprunt bancaire (emprunt indivis).
- La banque lui propose trois modalités au taux annuel de 8%, pour une durée de 4 ans :
  - Première modalité: Remboursement in fine.
  - Deuxième modalité: Remboursement par amortissements constants.
  - Troisième modalité: Remboursement par annuités constantes.

1) Remplir les 3 tableaux en expliquant comment obtenir la première ligne de chaque tableau.

2) Quelle modalité choisir si l'objectif de l 'entrepreneur est de payer le moins d'intérêts possible ?

CHAP 4 : Les emprunts indivis

Solution

Remplir les 3 tableaux en expliquant comment obtenir la première ligne de chaque tableau.
- Première modalité: Remboursement in fine.

Périodes	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
1	800000	64000	0	64000
2	800000	64000	0	64000
3	800000	64000	0	64000
4	800000	64000	800000	864000

Coût de l'emprunt = 256 000 *dh*

CHAP 4 : Les emprunts indivis

Solution

Remplir les 3 tableaux en expliquant comment obtenir la première ligne de chaque tableau.

- Deuxième modalité: Remboursement par amortissements constants

Date	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
1	800000	64000	200000	264000
2	600000	48000	200000	248000
3	400000	32000	200000	232000
4	200000	16000	200000	216000

Coût de l'emprunt = 160 000 *dh*

CHAP 4 : Les emprunts indivis

Solution

Remplir les 3 tableaux en expliquant comment obtenir la première ligne de chaque tableau.

- Troisième modalité: Remboursement par annuités constantes.

Date	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
1	800 000	64000	177536,6436	241536,6436
2	622463,3564	49797,0685	191739,575	241536,6436
3	430723,7814	34457,9025	207078,7411	241536,6436
4	223645,0403	17891,6032	223645,0403	241536,6436

Coût de l'emprunt = 166 146, 57 *dh*

CHAP 4 : Les emprunts indivis

Solution

2) Quelle modalité choisir si l'objectif de l'entrepreneur est de payer le moins d'intérêts possible ?

- Première modalité: Remboursement in fine.

Coût de l'emprunt = 256 000 *dh*

- Deuxième modalité: Remboursement par amortissements constants.

Le plus faible coût → **Coût de l'emprunt = 160 000 *dh***

- Troisième modalité: Remboursement par annuités constantes.

Coût de l'emprunt = 166 146, 57 *dh*